

**MEDIDAS DE EFICIÊNCIA,  
UM CASO DE ESTUDO**

*Maria Angélica Camargo  
Beatriz R. Tavares Franciosi*

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Porto Alegre - Brasil

INTRODUÇÃO

É através da Matemática que se traçam os possíveis caminhos da resolução de problemas científicos. Entretanto, muitas vezes, a aplicação não é imediata em um problema numérico.

A análise numérica é o ramo da Matemática que desenvolve técnicas para a resolução de problemas numéricos.

Os métodos de aproximação de solução para equações polinomiais, fornecidos pela Análise Numérica, são de vital importância para a resolução de equações de grau superior a 4 e até mesmo para algumas de ordem 3 ou 4 que não podem ter suas raízes exatamente computadas através de métodos analíticos.

Os vários métodos, determinam um número para o qual a função neste ponto é zero, ou seja,  $f(\xi) = 0$  (é o limite de uma seqüência de iterações).

Neste trabalho, apresentamos alguns métodos iterativos, os quais foram por nós escolhidos para amostrar um grupo maior.

O objetivo do trabalho não é o estudo individual dos métodos mas sim estima o "esforço" envolvido para completar um laço da função iterativa com a exatidão desejada. Esta medida de "esforço" será denominada ÍNDICE DE EFICIÊNCIA DO MÉTODO e calculada segundo as funções índice de eficiência apresentadas no segmento do trabalho.

Não existe nada de inédito neste trabalho, existe sim uma tentativa de oferecer ao leitor uma análise imparcial do índice de eficiência\* dos métodos apresentados.

\* Índice de eficiência teórica & índice de eficiência prático

CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MÉTODOS ANALISADOS

1) Método de Newton

Fórmula do método

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- \* O cálculo do método de Newton é relativamente simples e realiza as iterações em um espaço não muito grande de tempo. Isto faz com que ele valha a pena de ser implementado.
- \* O método requer a avaliação da derivada e da função a cada iteração.

Existem dois métodos que podem ser usados para avaliar a derivada em um programa de computador:

1º método - incluir uma subrotina que calcule a expressão analítica para calcular a derivada.  
desvantagem do método - requer uma subrotina diferente para toda nova função.

2º método - usar uma fórmula (bastante exata) aproximada, para a derivada, ou seja, por definição a derivada de  $f$  é dada por:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Neste caso temos que fazer algumas considerações quanto ao  $\Delta x$ . Como não é possível fazer  $x$  aproximadamente zero, em um programa, nós temos que reduzi-lo a um número bastante pequeno. A questão é o quanto pequeno?

A melhor solução é fazer o tamanho de  $\Delta x$  ser proporcional ao tamanho de  $x$ , ou seja, se  $x$  é muito grande, então  $\Delta x$  será muito grande. Se  $x$  é muito pequeno, então  $\Delta x$  é uma boa aproximação de  $x$ .

$\Delta x = \theta x$  onde  $\theta$  é uma constante de proporcionalidade.

- \* convergência do método de Newton pode ser obtida considerando a série de Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x-x_0)^2}{2} + \dots$$

Considerando o valor inicial assumido para o método.

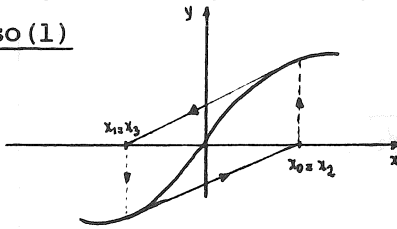
Como os métodos de Newton se aproxima da raiz ignorando os termos que sucedem à 1ª derivada, temos

logo a ordem do erro é

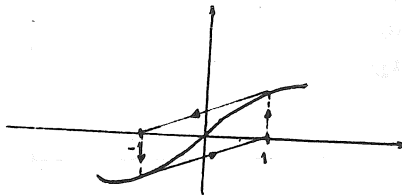
A convergência é quadrática para raízes simples e é linear para raízes múltiplas.

\* problemas do método de Newton

caso (1)



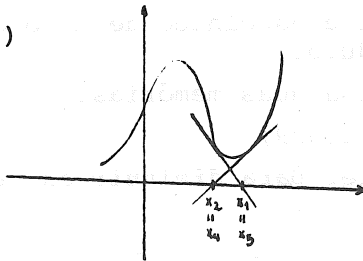
caso (2)



$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$  uma raiz é zero mas para  $x_0 = 1$  temos

- $x_1 = -1$
- $x_2 = 1$
- $x_3 = -1$
- $\vdots$

caso (3)



$x_n = (-1)^n$  ou seja para  $x_0 \geq 1$  o método diverge.

2) Método da Secante

Fórmula do método

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

\* a fórmula fornece uma maneira segura e precisa para calcular  $x_{n+1}$  se  $|f(x_n)| < |f(x_{n-1})|$

Se isto não acontecer, então troca-se  $x_n$  por  $x_{n-1}$

- \* convergência super-linear (1.616)
- \* unipontual com memória-usa uma memória
- \* útil para funções com cálculo de derivada difícil
- \* trabalha com um intervalo inicial  $[x_0, x_1]$  e a cada iteração é feito uma avaliação da função. O valor da iteração anterior é reusado.

3) Método de Müller

Fórmula do método

$$x_{n+1} = \frac{2d_2}{-d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - 4d_0d_2}}$$

onde  $d_1, d_2, d_0$  satisfazem

$$\begin{cases} d_0 x_0^2 + d_1 x_0 + d_2 = p(x_0) \\ d_0 x_1^2 + d_1 x_1 + d_2 = p(x_1) \\ d_0 x_2^2 + d_1 x_2 + d_2 = p(x_2) \end{cases}$$

- \* o sinal a frente do radical é escolhido de modo que o denominador tenha o maior módulo.
- \* multipontual como memória-usa duas memórias.
- \* convergência super-linear (1.839)
- \* Algoritmo proposto por Müller para diminuir os erros de arredondamento:

1. entrada { grau do polinômio, coeficientes do polinômio, 3 pontos iniciais }

2. calcula  $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ 

3.  $\lambda_2 = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}$

4. Para  $i = 3, 4, 5, \dots$  até que satisfaça:

4.1.  $d_i = 1 + \lambda_i$

4.2.  $g_i = f_{i-2} \lambda_i^2 - f_{i-1} d_i + f_i (\lambda_i - d_i)$

4.3.  $\lambda_{i+1} = \frac{2f_i d_i}{g_i \pm \sqrt{g_i^2 - 4f_i d_i (\lambda_i - f_{i-1} d_i + f_i)}}$

4.4.  $h_{i+1} = \lambda_{i+1} h_i$

4.5.  $x_{i+1} = x_i + h_i$

5. saída  $\{i, x_i\}$

4) Método de Fourier

Fórmula do método

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)})}{f'(x_n)}$$

\* satisfaz as condições de Fourier, isto é:

seja  $f(x)$  uma função no intervalo  $x_0 = [x_0, y_0]$  que satisfaz as condições:

- (i)  $a \in x_0$ , onde  $f(a) = 0$
- (ii)  $f'(x) \cdot f''(x) \neq 0, \forall x \in x_0$
- (iii)  $f(x_0) \cdot f(y_0) < 0$
- (iv)  $f'(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

\* ordem de convergência cúbica

\* o método requer a avaliação da derivada e da função a cada iteração

\* é necessário verificar se  $x_{n+1} < y_{n+1}$  a cada iteração.

\* método híbrido.

5) Método de Dandelin

Fórmula do método

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\left( \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot f(x_n) \right)}{f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) - f(x_n)}$$

\* satisfaz as condições de Fourier.

\* ordem de convergência cúbica.

\* o método requer a avaliação da função e da derivada a cada iteração.

\* a cada iteração é necessária a verificação  $x_{n+1} < y_{n+1}$ 

\* método híbrido

6) Método C

Fórmula do método

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{y_n - x_n}{f(y_n) - f(x_n)}$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})}$$

- \* ordem de convergência cúbica.
- \* o método requer a avaliação da função e da derivada a cada iteração.
- \* método híbrido
- \* satisfaz as condições
  - (i)  $\alpha \in x_0 = [x_0, y_0]$ , onde  $f(\alpha) = 0$
  - (ii)  $f(x_0) \cdot f(y_0) < 0$

e uma das condições

- (iii)  $f'(x) > 0$  e  $f''(x) < 0$
- (iv)  $f'(x) < 0$  e  $f''(x) > 0$
- (v)  $f'(x) > 0$  e  $f''(x) > 0$
- (vi)  $f'(x) < 0$  e  $f''(x) < 0$

é necessário verificar se:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &< y_{n+1} \\ y_{n+1} &< y_n \\ x_{n+1} &< x_n \end{aligned}$$
MEDIDA DE EFICIÊNCIA - (ÍNDICE DE EFICIÊNCIA)

O índice de eficiência nos fornece uma estimativa do "esforço" computacional envolvido para completar um laço da função iterativa. Espera-se que tal medida de eficiência possa ser obtida através da definição de uma função que meça o índice de eficiência.

Questiona-se aqui: quais os itens que devem ser considerados para definir eficientemente a função - índice de eficiência? Que conjunto de entradas deve ser considerado quando se quer valorar o trabalho dispendido para completar um laço da iteração? como ponderar convenientemente estas entradas em uma função iterativa, de tal forma que elas nos forneça como saída, uma informação confiável? Itens como ordem de convergência, tamanho da constante assintótica de erro, custo da função e de suas derivadas por iteração é sabido que devem ser considerados, mas eles são suficientes ou necessários para formular uma função-índice de efi-

ciência-confiável?

Com a finalidade de sabermos até que ponto a teoria, ou seja, o índice de eficiência teórico revela o que acontece praticamente, foi feita a análise teórica e prática dos índices de eficiência mais encontrados na bibliografia.

### MEDIDA DE EFICIÊNCIA TEÓRICA

$$\text{Ostrowski (1960)} \quad E_2 = p \frac{1}{e}$$

onde p: é a ordem de convergência do método  
e: é o número de avaliações da função por iteração

$$\text{Traub (1964)} \quad E_1 = \frac{p}{e}$$

onde p, e são obtidos analogamente à Ostrowski

Estas medidas assintóticas caracterizam um método em particular, quando o número de iteração tende ao infinito.

Quanto maior o valor do índice de eficiência mais eficiente, assintoticamente, é o método.

As duas medidas apresentadas acima, nem sempre de mostram a realidade e deixam a desejar quanto aos itens a ser considerados.

Feldston & Firestone (1969)

Levando em consideração que algoritmos de mesma eficiência teórica não tinham a mesma eficiência na prática Feldston & Firestone propuseram seu índice

$$E_3 = p \frac{1}{H}$$

$$\text{onde } H = e \left( 1 + \frac{A}{B} \right)$$

p: ordem de convergência do método  
e: número de avaliações da função/iteração  
A: número de operações aritméticas para calcular um ciclo do algoritmo.  
B: nº de operações aritméticas para calcular f, f', f'', ...

Seguindo a mesma idéia

Kung e Traub (1973) propuseram uma medida de eficiência que contraria a proposta anterior de Traub.

$$E_6 = \frac{\log_2 p}{\sum_i n_i \sqrt{f^{(i)}} + C(\emptyset)}$$

p: ordem de convergência do método

$n_i$ : nro de avaliações de função f

$\sqrt{f^{(i)}}$ : nro de operações aritméticas para uma avaliação de f

$C(\emptyset)$ : nro mínimo de operações aritméticas do método

i: número de derivadas da função

Peterson (1975)

$$E_4 = \frac{1}{M} \log_2 p$$

M: nro total de multiplicações da função iteração e das funções envolvidas

Ainda

$$E_5 = c \frac{\log p}{A_n + B_n}$$

$A_n$ : tempo para completar a iteração sem contar f,  $f'$ ,  $f''$ , ...

$B_n$ : tempo para calcular f,  $f'$ ,  $f''$ , ...

A escolha da função iterativa, com a qual nós iremos resolver nosso problema, depende da natureza do mesmo e portanto é difícil se fazer uma recomendação precisa de qual função é a mais apropriada.

Assumindo que o polinômio e suas derivadas são avaliados usando o algoritmo de Horner, o qual requer para um polinômio de grau n, n adições e n multiplicações, foi de finida a tabela (1).

A construção da tabela (1) foi baseada na tabela auxiliar, na qual constam explicitamente os valores dos parâmetros de entrada tomados.

Com a finalidade de verificar o melhor método segundo os índices sugeridos (teoricamente) foi feita uma avaliação pra grau do polinômio (n) variando de 1 até 100. As conclusões a que se chegou estão no segmento do trabalho.

OBS: A listagem da avaliação está a disposição dos interessados.



TABELA (1)

Nome do método	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>6</sub>
Newton	1	1.414	$2 \frac{2n-1}{3n+2}$	$(2n)^{-1}$	1505/n	1/4n
Secante	1.518	1.618	$1.618 \frac{4n}{4n+5}$	$(2.88+2.88n)^{-1}$	104.5/(1+n)	1/2.88n
Müller	1.839	1.839	$1.839 \frac{n}{n+4}$	1.1099	264.6/(8+n)	0.0488
Fourier	1	1.442	$3 \frac{3n-1}{9n+3}$	$(1.893n+0.63)^{-1}$	477.1/(1+3n)	1/(37.94n+12.66)
Dandelin	1	1.442	$3 \frac{6n+2}{11n+9}$	$(1.893n+1.262)^{-1}$	477.1/(2+3n)	1/(37.94n+18.99)
C	0.75	1.316	$3 \frac{4n-1}{16n-10}$	$(2.524n+1.262)^{-1}$	238.6/(1+2n)	1/(50.63n+31.65)

TABELA AUXILIAR

Nome do método	P	A	B	M	An	Bn	ni	C(0)	C
Newton	2	2	4n-2	2n	1	2n-1	2	1	1000
Secante	1.618	5	4n	2n+2	2	2n	1	0	1000
Müller	1.839	28	2n	8	8	n	1	10	1000
Fourier	3	4	6n-2	3n+1	2	3n-1	2	2	1000
Dandelin	3	5	6n-2	3n+2	3	3n-1	2	2	1000
C	3	7	8n-2	3	3	4n-1	2	1	1000

A partir da tabela(1) e dos valores obtidos quando  $n$  variou de 1 até 100, concluiu-se em um primeiro momento que:

Segundo: Traub(1964)  $E_1$  Müller é a melhor escolha.  
 Ostrowski(1960)  $E_2$  Müller é a melhor escolha  
 Feldston & Firestone(1969)  $E_3$  para polinômios de grau:  
 1 a 3 Dandelin  
 4 a 43 Secante  
 47 a 100 Müller  
 Peterson(1975)  $E_4$  a melhor escolha é C  
 ...  $E_5$  o melhor método é:  
 Newton para grau 1 a 5  
 Fourier para grau 6 a 100  
 Kung & Traub(1973)  $E_6$  para polinômios de grau:  
 1 a 2 Newton  
 3 a 100 Secante

De posse destas informações resta-nos verificar até que ponto o índice de eficiência teórico e o prático se equiparam.

Para medir o tempo necessário para encontrar a raiz de um polinômio, segundo: Newton, Secante, Müller, C, Fourier, Dandelin usou-se os seguintes polinômios.

$$f_1 = (1 + (1-n)^2)x - (1-nx)^2$$

$$f_2 = (1-x)^n + x^2$$

$$f_3 = (1 + (1-n)^4)x - (1-nx)^4$$

$$f_4 = \frac{nx-1}{(n-1)x}$$

Usou-se uma variação para  $n= 1,2,3,5,15,20$  e obtve-se os seguintes resultados:

Para $f_1$ com $n=1$ (melhor tempo → pior tempo)	Newton Müller C Secante & Fourier Dandelin
$n=2$ .....	Newton Müller Secante C Fourier Dandelin
$n=3$ .....	Newton Müller Secante C Fourier Dandelin

	n=5 .....	Newton Müller C Secante Fourier Dandelin
	n=15 .....	Müller Secante & C Newton Fourier Dandelin
	n=20 .....	Müller C Secante Fourier Dandelin
Para $f_2$ com	n=1 .....	Newton C Fourier Secante Dandelin
	n=2 .....	Newton Secante, Fourier & C Dandelin
	n=3 .....	Newton C Secante Fourier Dandelin
	n=5 .....	Newton C Dedelin Secante Fourier
	n=15 .....	Newton C Fourier Dandelin Secante
	n=20 .....	Newton C Dandelin Fourier Secante
para $f_3$ com	n=1.....	Secante Newton C Fourier Dandelin
	n=2 .....	Secante Newton C Fourier Dandelin

n=3 .....	Secante Newton Fourier Dandelin C
n=5 .....	Secante Newton Fourier Dandelin C
n=15 .....	Secante Newton Fourier Dandelin C
n=20 .....	Secante Newton Fourier Dandelin C
Com $f_4$ com n=2 .....	Secante Newton C Dandelin Fourier
n=3 .....	Secante Newton Dandelin Fourier C

## CONCLUSÃO

- \* O índice de eficiência  $E_5$ , é o índice teórico que mais se aproxima da realidade;
- \* mesmo  $E_5$  sendo o melhor ele nem sempre é consonante com o que acontece na prática, daí não é confiável;
- \* os índices de eficiência propostos, não medem tempo (custo). Algumas vezes eles coincidem com o tempo real;
- \* A afirmação: Quanto maior a ordem de convergência do método menor é o tempo de execução (mais rápido ele converge), não é confirmada na prática.
- \* Como os tempos são muito pequenos a escolha do método não está rigidamente ligada ao de melhor tempo mas sim ao método que dá uma garantia maior da raiz (métodos híbridos fornecem o intervalo onde se encontra a raiz e portanto o erro é menor).